

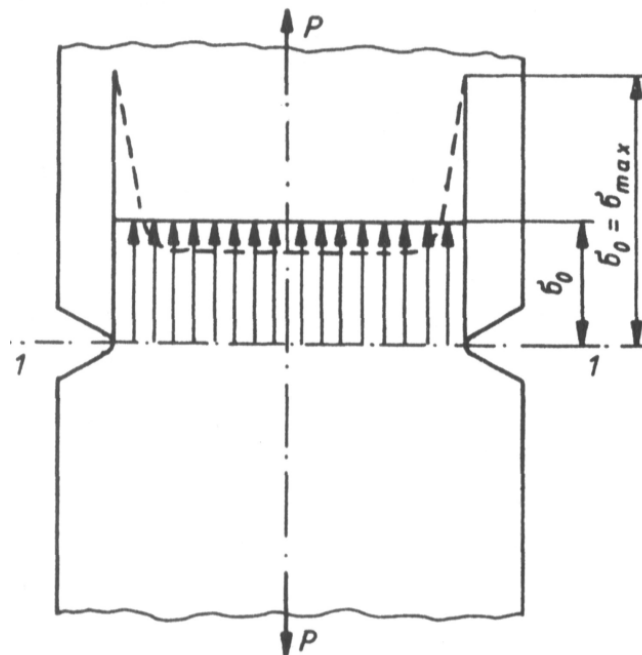
BADANIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W TARCZY PROSTOKĄTNEJ Z KARBEM

1.1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest porównanie rozkładów naprężeń uzyskanych na podstawie wzorów elementarnych z rozkładami uzyskanymi w wyniku pomiarów w przekrojach cienkich tarcz z osłabionymi przekrojami. Efektem przeprowadzonych pomiarów będzie m.in. wyznaczenie przybliżonych wartości współczynników spiętrzenia naprężeń w tych przekrojach.

1.2 Wprowadzenie teoretyczne

Poznane na kursie wytrzymałości materiałów metody wyznaczania rozkładu naprężeń i odkształceń dotyczyły przekrojów brył i obszarów dostatecznie odległych od miejsc przyłożenia obciążenia w postaci sił skupionych, jak również dostatecznie odległych od miejsc nagłych zmian kształtu brył, np. raptownych zmian przekroju, otworów podcięć itp. Były więc analizowane przypadki, dla których obowiązywał niezaburzony rozkład naprężeń zgodnie z zasadą de Saint-Venanta [1]. W celu przypomnienia zilustrujemy to stwierdzenie przykładem (rys. 1.1) pręta obciążonego osiowo siłą P . Wszelkie zmiany przekroju pręta powodują lokalny wzrost naprężeń (spiętrzenie), tym gwałtowniejszy, im bardziej raptowna jest zmiana jego wymiarów poprzecznych.



Rys.1.1 Przykład działania karbu w rozciągającym pręcie z naciętym rowkiem. Linia kreskowa oznacza rozkład naprężeń w przekroju 1-1 z uwzględnionym działaniem karbu

Na rysunku 1.1 uwidoczono spiętrzenie naprężeń na dnie rowka naciętego na przecie, pokazując jednocześnie rozkład naprężeń bez uwzględnienia działania karbu (linia ciągła). Takie naprężenia obliczone teoretycznie w przekroju 1-1 za pomocą wzoru 1.1, nazywać będziemy naprężeniami normalnymi:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} \quad (1.1)$$

gdzie F – pole przekroju 1-1 pręta.

Takie fragmenty ciał (elementów maszyn), jak skoki przekroju, otwory itp. oraz miejsca działania sił skupionych wywołują lokalny wzrost naprężeń i są nazywane *karbami*. Maksymalne naprężenia spowodowane istnieniem karbu są kilkakrotnie większe niż tzw. naprężenia nominalne (obliczone w danym przekroju, tak jak gdyby karbu nie było).

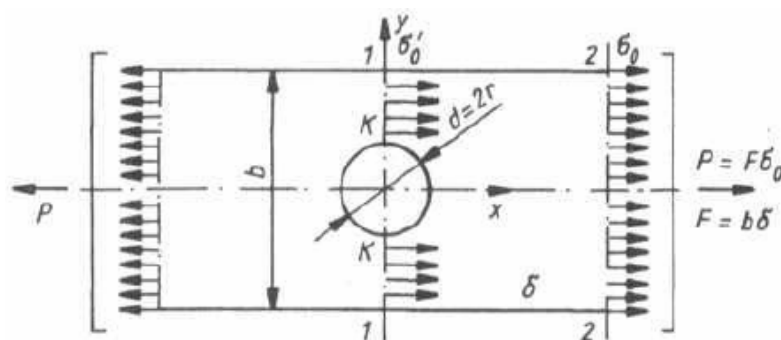
Rozpatrzmy drugą tarczę (płaskownik) o szerokości b , grubości δ , w której wywiercono pośrodku mały otwór o średnicy d (rys.1.2). Tarczę poddano osiowemu rozciąganiu siłą P . Pod działaniem siły P w przekroju 2-2, dostatecznie odległym od miejsca zaczepienia siły i od otworu, naprężenia nominalne rozciągające są rozłożone równomiernie, a ich wartość wynosi:

$$\sigma_0 = \frac{P}{b\delta} \quad (1.2)$$

Jest to jednowymiarowy stan naprężeń. Analogicznie wg teorii elementarnej można obliczyć naprężenie nominalne w przekroju osłabionym otworem:

$$\sigma'_0 = \frac{P}{\delta(b-d)} \quad (1.3)$$

Widać, że $\sigma'_0 > \sigma_0$.



Rys. 1.2 Naprężenia nominalne w płaskiej tarczy osłabionej otworem w przekroju 1-1 i w przekroju pełnym 2-2

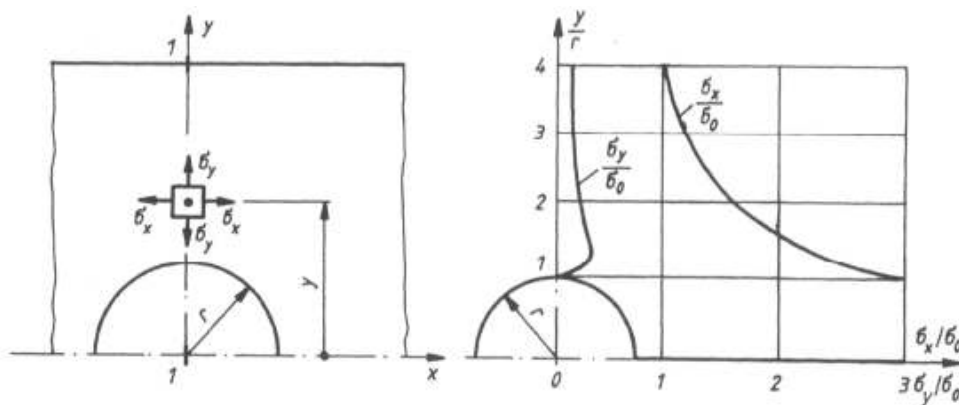
Takie podejście do obliczenia rozkładu naprężeń w przekroju 1-1 jest „nieczułe” na istnienie karbu, tzn. nie uwzględnia go. Jednak jak dowodzi doświadczenie i dokładniejsza

analiza stosowana w teorii sprężystości, rozkład naprężeń w przekroju 1-1 jest *nierównomierny i nieliniowy* oraz *dwuwymiarowy*. Powodem tego stanu jest fakt, że włókna podłużne tarczy przecięte otworem nie mogą przenosić sił wzdłużnych tuż przy granicy otworu i siły te są „przejmowane” przez najbliższe włókna nie przecięte otworem. Dla przekroju 1-1, najbardziej osłabionego otworem, pokazano na rys. 1.3 rozkład naprężeń w kierunku działania siły P w postaci $\frac{\sigma_x(y)}{\sigma_0}$ oraz rozkład naprężeń w kierunku prostopadłym do siły P w postaci $\frac{\sigma_y(y)}{\sigma_0}$.

Podany na rys. 1.3 rozkład naprężeń jest opisany w teorii sprężystości zależnościami[1]:

$$\sigma_x(y) = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{r^2}{2y^2} \right) + \left(\frac{3r^4}{2y^4} \right) \right] \quad (1.4)$$

$$\sigma_y(y) = \frac{3}{2} \sigma_0 \left[\left(\frac{r^2}{y} \right) - \left(\frac{r}{y} \right)^4 \right]$$



Rys. 1.3 Rozkład naprężeń w przekroju 1-1 tarczy poddanej rozciąganiu

Zauważmy, że przy zbliżaniu się do brzegu swobodnego ($y \rightarrow \pm \frac{b}{2}$) i przy założeniu, że $r \ll b$, będzie:

$$\begin{aligned} \sigma_x(y) &\rightarrow \sigma_0 \\ \sigma_y(y) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Przy zbliżaniu się do krawędzi otworu ($y \rightarrow \pm r$):

$$\begin{aligned} \sigma_x(y) &\rightarrow 3\sigma_0 \\ \sigma_y(y) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

W punktach K naprężenia wynoszą ($y = \pm r$):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 3\sigma_0 \\ \sigma_y &= 0\end{aligned}$$

Taki lokalny wzrost wartości naprężeń $\sigma_x(y)$ nazywamy *spiętrzeniem* lub *koncentracją* naprężeń. Zjawisko spiętrzenia naprężeń występuje w sytuacjach praktycznych, tam gdzie mamy do czynienia z karbem. Dokładniej omówiono to zagadnienie w podręcznikach wytrzymałości materiałów [1, 2]. W obliczeniach stosuje się tzw. Współczynnik spiętrzenia naprężeń (współczynnik kształtu), który można zdefiniować następująco:

$$\alpha_k \rightarrow \frac{(\sigma_x)_{\max}}{\sigma_0} \quad (1.5)$$

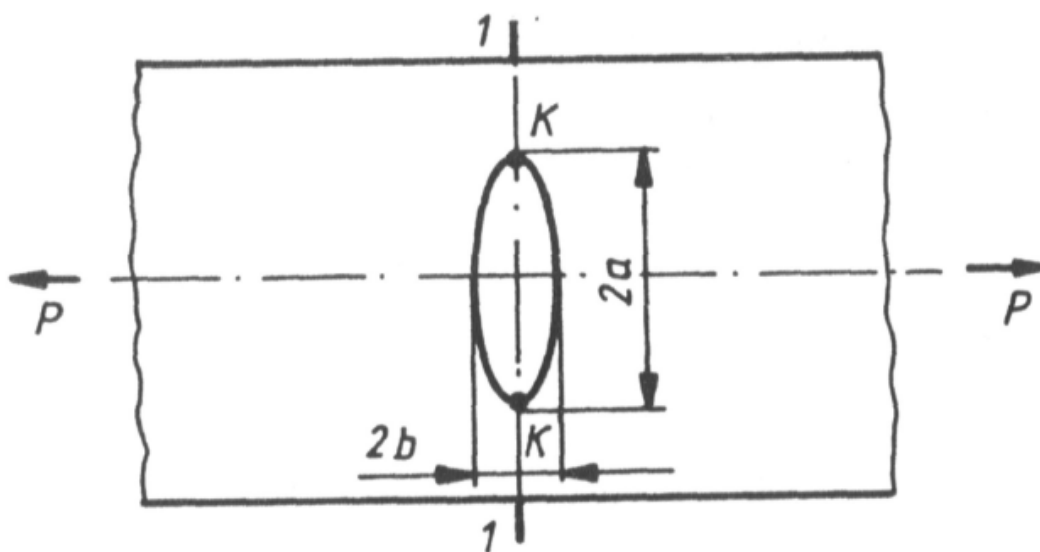
lub

$$\alpha'_k \rightarrow \frac{(\sigma'_x)_{\max}}{\sigma'_0} \quad (1.6)$$

Wartość nominalną naprężeń można obliczać w konkretnym przypadku wg. wzorów stosowanych w klasycznej wytrzymałości materiałów, np. σ_0 lub σ'_0 - dla rozważanej tarczy. Zatem pojęcie *współczynnika spiętrzenia naprężeń* może być definiowane na dwa sposoby. Jeśli zamiast otworu kołowego w tarczy z rys 1.2 rozważymy otwór eliptyczny wykonany pośrodku tarczy (rys. 1.4), to współczynnik spiętrzenia naprężeń α_k w pobliżu punktów K wyrazi się wzorem [3]

$$\alpha_k = 1 + \frac{2a}{b} \quad (1.7)$$

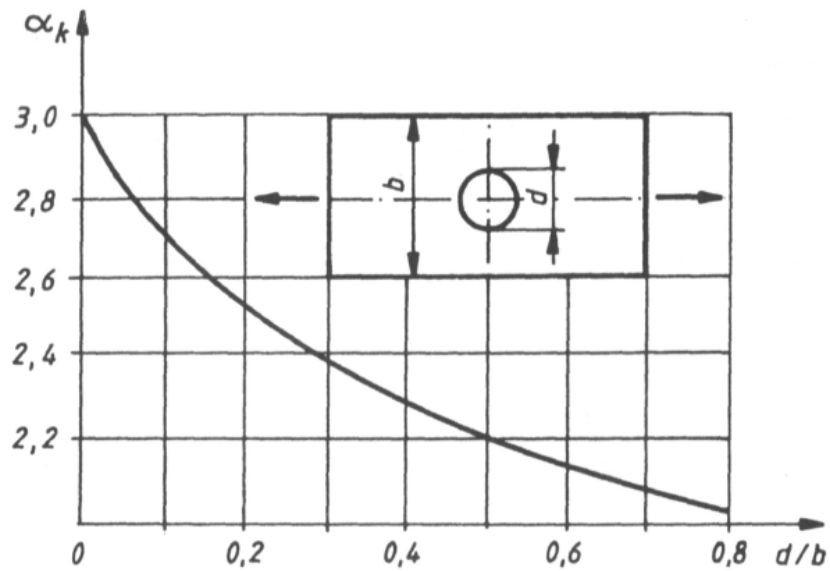
gdzie a, b – półosie elipsy.



Rys. 1.4 Tarcza z otworem eliptycznym

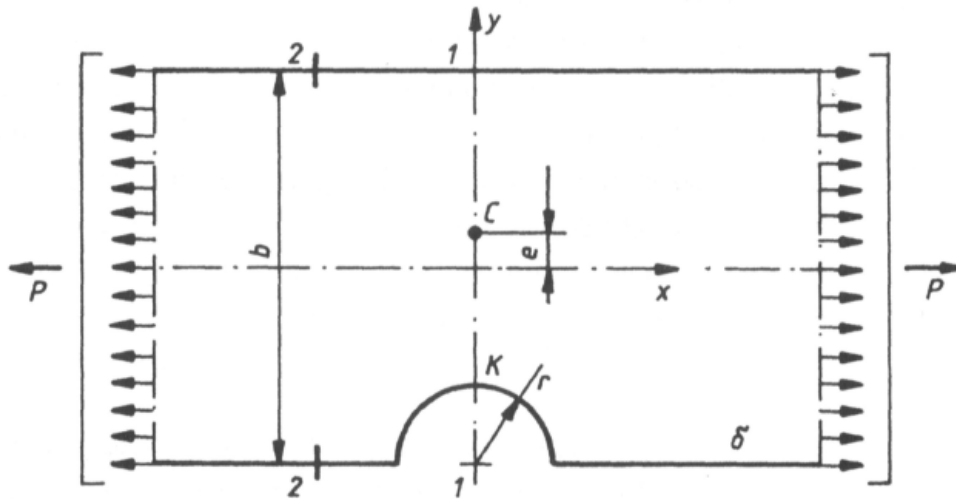
Dla $a = b$ otrzymujemy taki sam rezultat jak dla otworu kołowego, tzn. $\sigma_x = 3\sigma_0$, $\alpha_k = 3$. Jeżeli poprzeczna oś otworu $2a$ jest duża w porównaniu z osią $2b$, to współczynnik koncentracji naprężeń silnie wzrośnie w porównaniu ze współczynnikiem dla otworu kołowego.

Wykres pokazany na rys. 1.5 obrazuje, w jaki sposób średnica otworu d i szerokość płaskiej tarczy b wpływają na zmianę współczynnika spiętrzenia naprężeń α_k , gdy tarcza jest poddawana prostemu rozciąganiu.



Rys. 1.5 Wpływ stosunku $\frac{d}{b}$ na zmiany współczynnika koncentracji naprężeń α_k

Rozważmy obecnie inną tarczę osłabioną wycięciem o promieniu r (rys. 1.6). Środek C najbardziej osłabionego przekroju tarczy jest przesunięty względem przekroju pełnego o wielkość e , jak to zaznaczono na rysunku. Wyznaczenie rozkładu naprężeń w przekrojach 2-2, dostatecznie odległych od obciążonego brzegu tarczy i od wycięcia nie różni się od zadania dla tarczy poprzecznej. W przekroju 1-1 natomiast rozkład naprężeń unominalnych σ_0' będzie nierównomierny. Jeśli bowiem przetniemy myślowo tarczę w miejscu 1-1, to wysiłek przekroju będzie stanowić siła P i moment zginający



Rys. 1.6 Tarcza z niesymetrycznym wycięciem w postaci półkola o promieniu r

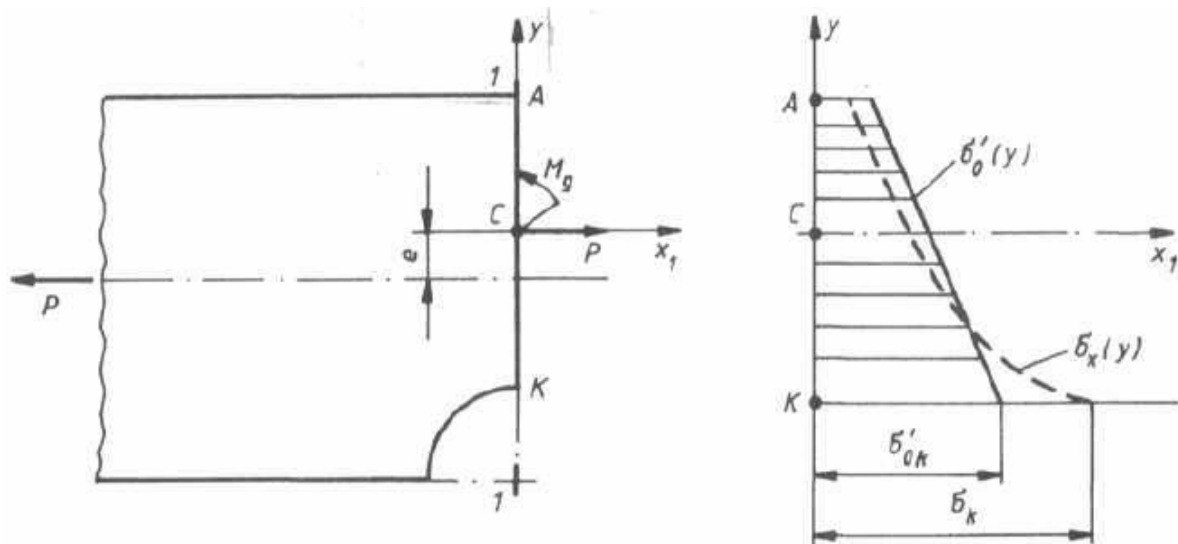
$M_g = Pe$, zapewniające stan równowagi jednej części tarczy. Stan taki został pokazany na rys. 1.7.

Naprężenia nominalne w dowolnym punkcie przekroju 1-1 na odcinku A-K będą superpozycją naprężeń spowodowanych rozciąganiem σ_r oraz naprężeń spowodowanych zginaniem σ_g , czyli

$$\sigma'_0 = \sigma_r + \sigma_g = \frac{P}{\delta(b-r)} + \frac{-12Pe}{\delta(b-r)^3} y \quad (1.8)$$

Na rysunku 1.7 rozkład naprężeń nominalnych $\sigma'_0(y)$ oznaczono linią ciągłą, a pomiarowych $\sigma_x(y)$ - kreskową.

We wzorze (1.8) wyrażenie $J_z = \frac{\delta(b-r)^3}{12}$ jest momentem bezwładności przekroju względem osi obojętnej przechodzącej przez początek układu Cx_1y . Wzór (1.8) został zapisany w układzie Cx_1y .



Rys. 1.7 Rozkład naprężeń w kierunku osi x_1 , wyznaczonych za pomocą wzoru (1.8) i na podstawie pomiarów

Zauważmy, że w zależności od wartości mimośrodów e mogą się pojawić na pewnej części odcinka A-K naprężenia ściskające, tzn. $\sigma'_0 < 0$.

W dalszym ciągu, podobnie jak w przypadku tarczy z otworem, będzie nas interesować wyznaczanie rozkładu naprężeń w kierunku działania siły rozciągającej P , a zwłaszcza wartości tych naprężeń w pobliżu punktów K.

Współczynnik spiętrzenia naprężeń zdefiniujemy dla tego przykładu w postaci (patrz rys. 1.7):

$$\alpha'_k = \frac{\sigma_k}{\sigma'_{0k}} \quad (1.9)$$

Wartość σ_k wyznaczamy na podstawie pomiarów tensometrycznych w pobliżu punktu K; natomiast σ'_{0k} obliczamy za pomocą wzoru (1.8) podstawiając wartość współrzędnej y w punkcie K.

Na wartość współczynnika α'_k mają również wpływ wymiary tarczy, takie jak promień wycięcia, szerokość tarczy oraz głębokość wycięcia.

Mając na uwadze różnorodność kształtów geometrycznych elementów maszyn możemy stwierdzić, iż na drodze teoretycznej jest bardzo trudno wyznaczyć współczynnik spiętrzenia naprężeń. Tylko w nielicznych przypadkach można uzyskać rozwiązania analityczne rozkładu naprężeń z uwzględnieniem zjawiska karbu (np. tarcza z otworem). Pomimo możliwości, jakie daje w wielu zagadnieniach metoda elementów skończonych, w dalszym ciągu wykorzystujemy eksperymentalne metody pomiaru rozkładu naprężeń i wyznaczania ich maksymalnych wartości.

Należy podkreślić, że spiętrzenie naprężeń jest szczególnie groźne przy obciążeniach dynamicznych i o długotrwałym działaniu – mamy wówczas do czynienia z obniżaniem się wytrzymałości elementu, zwanym zmęczeniem materiału.

W toku wielu badań wpływu zjawiska koncentracji naprężeń na zmęczenie materiałów ustalono, że wpływ ten nie daje się wyrazić prostą zależnością tylko od współczynnika α_k , lecz jest funkcją wielu czynników, takich jak stan powierzchni elementu, wrażliwość materiału na działanie karbu, współczynnik wielkości przedmiotu itd. Zagadnienia te zostały

opisane szerzej w cytowanych już książkach i w innych pracach na temat zmęczenia elementów maszyn.

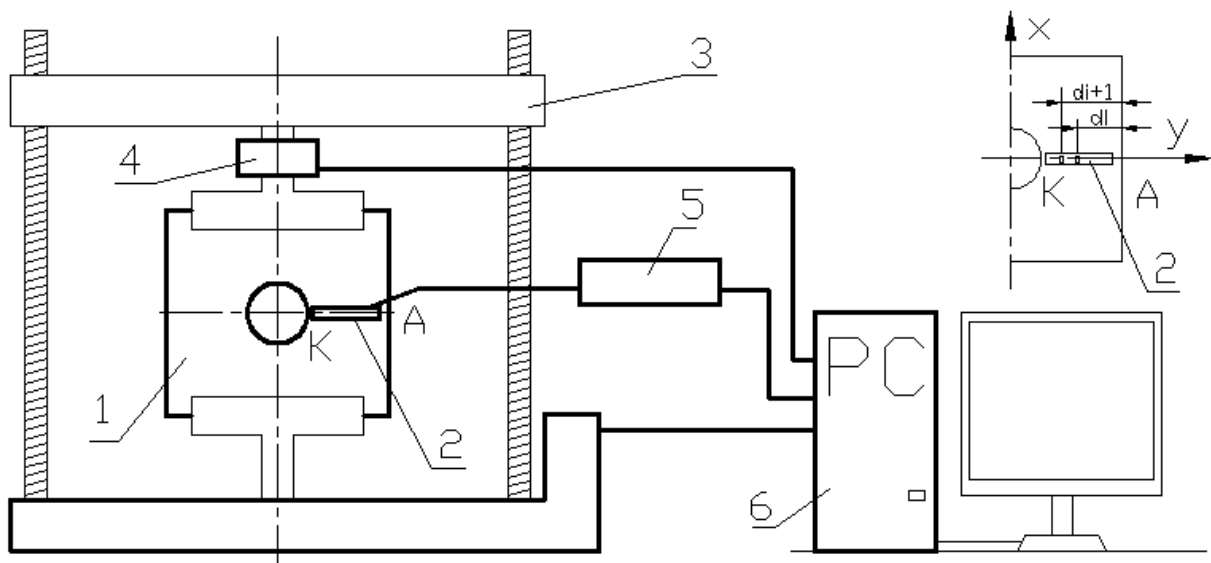
W tym ćwiczeniu ograniczymy się do wyznaczenia współczynnika spiętrzenia naprężeń α_k lub α'_k (czyli tzw. współczynnika kształtu) przy obciążeniu statycznym prostych tarcz prostokątnych z otworami lub wycięciami.

1.3 Opis stanowiska pomiarowego

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawiono na rys. 1.8. W skład stanowiska wchodzi:

- tarcza osłabiona karbem 1,
- zespół tensometrów oporowych 2,
- układ realizujący obciążenie 3,
- czujnik siły 4,
- wielokanałowy wzmacniacz tensometryczny 5,
- jednostka sterująca i rejestrator 6.

Badaniu zostaną poddane prostokątne tarcze, które będą obciążane siłami rozciągającymi przyłożonymi na dwóch przeciwległych brzegach tarcz; stwarza to możliwość uzyskania równomiernego rozkładu naprężeń $\sigma_x(y)$ w bliskiej odległości od obciążonych brzegów.



Rys. 1.8 Schemat układu pomiarowego

W przekrojach 1-1 tarcz zostały naklejone tensometry oporowe, które spełniają rolę przetworników pomiarowych i wraz ze wzmacniaczem tensometrycznym umożliwiają pomiar odkształcenia względnego, jakiemu ulegają tarcze poddane obciążeniu. Zjawisko tensooporowe polega na tym, że naklejony na badanym elemencie tensometr (jako czujnik) ulega odkształceniu wraz z tym elementem. Odkształcenie tensometru (drucika metalowego lub kilku równoległych drucików) powoduje, że jego opór elektryczny ulega zmianie. Zmiana oporu drutu jest (w granicach prawa Hooke'a) proporcjonalna do zadanego odkształcenia.

Ten fakt jest wykorzystywany do pomiaru odkształcenia np. podczas rozciągania lub ściskania prętów lub tarcz. Powyższe stwierdzenie możemy zapisać w postaci związku

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon$$

gdzie:

R - opór elektryczny drutu, z którego wykonany jest tensometr;

ΔR – przyrost oporu spowodowany odkształceniem tensometru (badanego elementu);

k – tzw. stała tensometru (współczynnik czułości tensometru), zależy głównie od materiału, z którego wykonano tensometr; stała k jest podawana przez producenta.

ε – odkształcenie względne tensometru (badanego elementu).

Tak więc, w i-tym punkcie pomiarowym:

$$\varepsilon_{pi} = \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_i \frac{1}{k}$$

Wchodzący w skład stanowiska wzmacniacz tensometryczny działa na zasadzie mostka zrównoważonego, mostek ten jest równoważony elektronicznie przez wewnętrzny mikrokontroler tj. po każdorazowej zmianie rezystancji tensometrów układ jest kompensowany automatycznie, działanie użytkownika ogranicza się do ustawienia wartości odpowiednich parametrów pomiaru oraz odczytu wyników pomiaru.

W trakcie wykonywania ćwiczenia tarcze zostaną obciążone siłą $P=0-2\text{kN}$. Odkształcenia względne ε_{pi} mierzone w przekroju 1-1 odpowiadają i-temu tensometrowi odległemu od brzegu tarczy o wielkość d_i . Naprężenie pomiarowe w i-tym punkcie wynosi więc

$$\sigma_{xi} = E\varepsilon_{pi}$$

E – moduł Younga dla materiału badanej tarczy.

1.4 Przebieg ćwiczenia

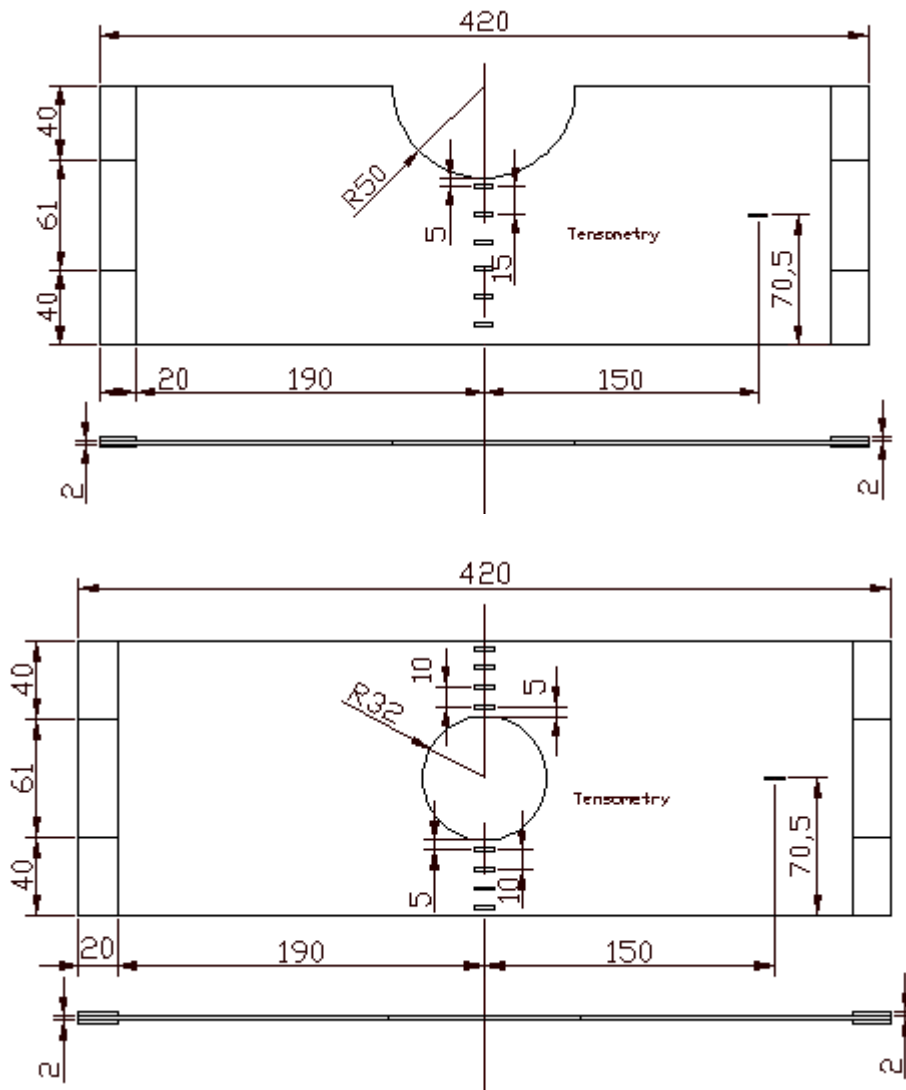
Ćwiczenie obejmuje:

- pomiar odkształceń ε_{xi} w przekroju osłabionym karbem dla kilku obciążeń tarczy (zmieniać wartości siły rozciągającej 0 – 2 [kN])
- pomiar odkształceń wzdłużnych i poprzecznych w przekroju wolnym od działania karbu.

Wymagania techniczne i bezpieczeństwa:

- w czasie działania maszyny wytrzymałościowej należy unikać bezpośredniego kontaktu ze strefą w której znajduje się badana próbka,
- przed uruchomieniem procedury pomiarowej sprawdzić stan zamocowania badanej tarczy w uchwytach samozaciskowych maszyny wytrzymałościowej, w szczególności osiowość ułożenia tarczy (zaciski powinny znajdować się w odpowiednich wycięciach na uchwytach tarczy)
- sprawdzić kolejność połączeń przewodów pomiędzy tensometrami a wejściami na wzmacniaczu tensometrycznym.

Parametry potrzebne do obliczeń:



Rys. 1.9 Wymiary tarcz

Kolejne czynności podczas doświadczenia:

- 1) Włączyć komputer, maszynę wytrzymałościową oraz wzmacniacz tensometryczny.
- 2) Uruchomić program sterujący maszyną wytrzymałościową *testXpert*.
- 3) Uruchomić program sterujący wzmacniaczem tensometrycznym *Esam-Traveller1*.
- 4) W porozumieniu z prowadzącym ustawić odpowiednie parametry w/w programów.
- 5) Uruchomić procedurę pomiarową maszyny wytrzymałościowej.
- 6) Zapisać wyniki dla kolejnych etapów procedury pomiarowej.

Sprawozdanie obejmuje:

- 1) Protokół pomiarowy
- 2) Krótkie przedstawienie celu i zakresu ćwiczenia
- 3) Obliczenie naprężeń nominalnych σ_0, σ'_0
- 4) Obliczenie wartości naprężeń na podstawie danych pomiarowych.
- 5) Wykonanie wykresów naprężeń nominalnych σ_0 i doświadczalnych $\sigma_{xi}(y)$. Dla tarczy z otworem dla porównania z wykresem doświadczalnym należy wykreślić funkcję $\sigma_x(y)$ zgodnie z podaną zależnością (1.4)
- 6) Obliczenie wartości współczynnika α_k lub α'_k w otoczeniu punktu K
- 7) Wnioski

Literatura

- [1] Brzoska Z., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1983
- [2] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1984
- [3] Shigley J.E., Mischke C.R., *Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, 1989.

